第26卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 5
2009年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0929-07

覆盖决策系统的相对约简*

张燕兰， 李进金

(漳州师范学院计算机科学与工程系，漳州 363000)

摘 要: 一个知识相对于另一个知识的关系在实际应用中十分重要，而覆盖是一种重要的知识。本文讨论知识的相对约简，保持一个覆盖相对于一族覆盖的正域不变的条件下，提出覆盖相对约简的概念，给出覆盖相对协调集和覆盖相对核心的判定定理，推广了不协调覆盖决策系统相对约简理论，该理论对于知识的相对约简有重要意义。

关键词: 正域；覆盖；相对约简

分类号: **AMS**(2000) 68T01 **中图分类号**: TP18 **文献标识码**: A

1 引言

知识约简是粗糙集理论[1,2]中的核心内容，通过约简可以删除不必要的知识，保留有用的知识。现有的知识约简的算法中，从核开始搜索知识约简集是一种很有效的算法，而这里关键是如何求核，我们知道辩识矩阵是一种重要的求核方法之一[3-8]。

在实际应用中，一个知识相对于另一个知识的关系十分重要。因此，有必要在保持一个划分相对于另一族划分的正域不变的情况下，进行知识的相对约简，它一直是现在研究的热点问题[5-7,9-13]。而且知识的相对约简还具有更重要的理论意义，比如协调决策信息系统的决策约简和不协调决策信息系统的下近似约简，都可统一到决策属性诱导的划分相对于条件属性集诱导的划分族的正域不变的相对约简。

有别于一个划分相对于一族划分的相对约简，文献[14]将决策信息系统的条件属性诱导的划分放宽为覆盖的条件下，提出保持一个划分相对于一族覆盖正域不变的相对约简，即不协调覆盖决策系统的相对约简，并给出辨识矩阵刻画约简。而本文进一步考虑在保持一个覆盖相对于一族覆盖正域不变，提出覆盖的相对约简，并构造辨识矩阵来给出约简方法，这对于知识的相对约简有重要意义。

2 决策信息系统的相对约简

下面给出决策信息系统中几个约简的定义，并对它们进行比较。

定义 1[2] 设 R 是论域 U 上的一个等价关系，则由 R 产生的划分为

$$U/R=\{[x]_R \mid x\in U\},\quad 其中\quad [x]_R=\{y\in U \mid xRy\}.$$

收稿日期: 2008-03-07. **作者简介**: 张燕兰 (1983年1月生)，女，硕士. 研究方向：粗糙集理论与应用.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10671173; 10571151)；福建省高校项目 (2008F5066)；漳州师院科学研究资助项目 (sk08005).

定义2 设 $(U,\mathbf{A},F)$ 是信息系统，$d:U\to V_d$ (V_d 取有限值)，称 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 为决策信息系统。对 $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}$，记

$$R_{\mathbf{B}}=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid f_l(x_i)=f_l(x_j)\ (\forall\, a_l\in\mathbf{B})\},$$

$$R_d=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid d(x_i)=d(x_j)\}.$$

为方便起见，记 $U/R_{\mathbf{B}}$ 为 $U/\mathbf{B}$，$[x]_{R_{\mathbf{B}}}$ 为 $[x]_{\mathbf{B}}$。

1)[2] 若 $R_{\mathbf{A}}\subseteq R_d$，称 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 为协调决策信息系统，否则称其为不协调决策信息系统。

2)[2,15] 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是协调决策信息系统，若存在 $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}$，使 $R_{\mathbf{B}}\subseteq R_d$，称 $\mathbf{B}$ 为决策协调集。若 $\mathbf{B}$ 为决策协调集，$\mathbf{B}$ 的任意真子集不是决策协调集，称 $\mathbf{B}$ 是 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 的决策约简集。

3)[15] 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是不协调决策信息系统，记 $U/R_d=\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$。对于任意 $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A},X\subseteq U$，记

$$\underline{R}_{\mathbf{B}}(X)=\{x\in U\mid [x]_{\mathbf{B}}\subseteq X\},\quad \underline{R}_{\mathbf{B}}=\big(\underline{R}_{\mathbf{B}}(D_1),\underline{R}_{\mathbf{B}}(D_2),\cdots,\underline{R}_{\mathbf{B}}(D_n)\big).$$

若 $\underline{R}_{\mathbf{B}}=\underline{R}_{\mathbf{A}}$，称 $\mathbf{B}$ 为下近似协调集。若 $\mathbf{B}$ 为下近似协调集，且 $\mathbf{B}$ 的任意真子集不是下近似协调集，称 $\mathbf{B}$ 为下近似约简集。

定义3[2] 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 为决策信息系统，d 的 $\mathbf{A}$ 正域记为 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)$，即

$$\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=\cup_{r=1}^{n}\underline{R}_{\mathbf{A}}(D_r).$$

若 $\mathbf{A}$ 的子集 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)$，则称 $\mathbf{B}$ 是 d 的 $\mathbf{A}$ 协调集。若 $\mathbf{B}$ 是 d 的 $\mathbf{A}$ 协调集，且对 $\mathbf{B}$ 的任意真子集 $\mathbf{C}$ 有 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)\neq\mathrm{Pos}_{\mathbf{C}}(d)$，则称 $\mathbf{B}$ 是 d 的 $\mathbf{A}$ 约简，简称相对约简。$\mathbf{A}$ 的所有相对约简的交称为相对核心，记为 $\mathrm{core}_{\mathbf{A}}(d)$。

定理1 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是协调决策信息系统，$\mathbf{B}$ 是 d 的 $\mathbf{A}$ 约简 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B}$ 是决策约简集。

证明 只需证 $\mathbf{B}$ 是决策协调集 $\Leftrightarrow \mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)$。

必要性 $\mathbf{B}$ 是决策协调集，则 $R_{\mathbf{B}}\subseteq R_d$，所以对任意的 $x\in U$ 有 $[x]_{\mathbf{B}}\subseteq[x]_d$。那么 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=U$。

充分性 由于 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是协调决策信息系统，有 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=U$。则对任意的 $x\in U$ 有 $\underline{R}_{\mathbf{B}}([x]_d)=[x]_d$，于是对任意的 $y\in[x]_d$ 有 $[y]_{\mathbf{B}}\subseteq[x]_d=[y]_d$。所以 $R_{\mathbf{B}}\subseteq R_d$，可见 $\mathbf{B}$ 是决策协调集。 **证毕**

定理2 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是不协调决策信息系统，$\mathbf{B}$ 是 d 的 $\mathbf{A}$ 约简 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B}$ 是下近似约简集。

证明 **充分性** 若 $\mathbf{B}$ 是下近似协调集，则显然 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)$。

必要性 设 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)$，即

$$\cup_{r=1}^{n}\underline{R}_{\mathbf{A}}(D_r)=\cup_{r=1}^{n}\underline{R}_{\mathbf{B}}(D_r).$$

由于 U/R_d 是 U 的划分，且对任意的 $x\in U$ 有 $[x]_{\mathbf{A}}\subseteq[x]_{\mathbf{B}}$，则必须满足对任意的 $D_r\in U/R_d$ 有 $\underline{R}_{\mathbf{A}}(D_r)=\underline{R}_{\mathbf{B}}(D_r)$，故 $\mathbf{B}$ 是下近似协调集。 **证毕**

从定理1和定理2可见，协调决策信息系统的决策约简和不协调决策信息系统的下近似约简，都是相对约简。

3　覆盖决策系统的相对约简

下面给出文献[14]中一个划分相对于一族覆盖的正域的定义。为了符号一致，沿用属性集的符号表示覆盖集。

定义4[14]　设$\mathbf{A} = \{\mathcal{C}_j \mid j = 1, \cdots, m\}$是论域$U$的一族覆盖。对$x \in U$，设$(x)_{\mathbf{A}} = \cap\{C \mid x \in C,\ C \in \mathcal{C}_j,\ j = 1, \cdots, m\}$，则$\mathrm{Cov}(\mathbf{A}) = \{(x)_{\mathbf{A}} \mid x \in U\}$是$U$的一个覆盖，称其为$\mathbf{A}$诱导的覆盖。对于$X \subseteq U$，$X$关于$\mathrm{Cov}(\mathbf{A})$的下近似为

$$\underline{C}_{\mathbf{A}}(X) = \cup\{(x)_{\mathbf{A}} \mid (x)_{\mathbf{A}} \subseteq X\} = \{x \mid (x)_{\mathbf{A}} \subseteq X\}.$$

U的划分$\mathcal{P}$关于$\mathrm{Cov}(\mathbf{A})$的正域为$\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(\mathcal{P}) = \cup_{D \in \mathcal{P}} \underline{C}_{\mathbf{A}}(D)$。

容易知道，对$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$，$x, y \in U$有：

1)　$(x)_{\mathbf{B}} = \cap_{\mathcal{C} \in \mathbf{B}} (x)_{\mathcal{C}}$，　　2)　$y \in (x)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (y)_{\mathcal{C}} \subseteq (x)_{\mathcal{C}}$。

文献[14]给出一个划分相对于一族覆盖的相对约简的定义。本文进一步在保持一个覆盖相对于一族覆盖的正域不变的情况下，对覆盖族进行约简。

定义5　设$\mathbf{A}, \mathcal{D}$分别是U的一族覆盖和一个覆盖，称$(U, \mathbf{A}, \mathcal{D})$为覆盖决策系统。若$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$满足$\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(\mathcal{D}) = \mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(\mathcal{D})$，则称$\mathbf{B}$是覆盖相对协调集。若$\mathbf{B}$是覆盖相对协调集，而$\mathbf{B}$的任意真子集不是覆盖相对协调集，则称$\mathbf{B}$是覆盖相对约简。$\mathbf{A}$的所有覆盖相对约简的交称为覆盖相对核心。

由于信息系统的属性等同于划分，决策信息系统就是一类特殊覆盖决策系统，故定义3中的相对约简和相对核心必然是覆盖相对约简和覆盖相对核心。下面分别对两个不同类型的覆盖决策系统给出求相对约简的方法。

3.1　在“对任意的$D_i \neq D_j \in \mathcal{D}$有$\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_i) \cap \underline{C}_{\mathbf{A}}(D_j) = \emptyset$”下的约简

这一小节针对U中的每个元素至多属于$\mathcal{D}$中一个集合下近似的覆盖决策系统给出约简方法。

例1　设$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\mathbf{A} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$和$\mathcal{D}$是$U$的一族覆盖和一个覆盖，它们为

$$\mathcal{C}_1 = \{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5\}\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{\{1,2,3\},\{3,4\},\{5\}\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{4,5\}\}, \qquad \mathcal{D} = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}.$$

容易得表1。

表1:　例1中不同覆盖族诱导的覆盖

x	1	2	3	4	5
$(x)_{\mathcal{C}_1}$	{1,2}	{2}	{2,3,4}	{4}	{4,5}
$(x)_{\mathcal{C}_2}$	{1,2,3}	{1,2,3}	{3}	{3,4}	{5}
$(x)_{\mathcal{C}_3}$	{1,2}	{1,2}	{3,4}	{4}	{4,5}
$(x)_{\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}}$	{1,2}	{2}	{3}	{4}	{5}
$(x)_{\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}}$	{1,2}	{2}	{3,4}	{4}	{4,5}
$(x)_{\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}}$	{1,2}	{1,2}	{3}	{4}	{5}
$(x)_{\mathbf{A}}$	{1,2}	{2}	{3}	{4}	{5}

可求出

$$\underline{C}_{\mathbf{A}}(\{1\})=\emptyset,\quad \underline{C}_{\mathbf{A}}(\{2,3\})=\{2,3\},\quad \underline{C}_{\mathbf{A}}(\{4,5\})=\{4,5\},\quad \mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(\mathcal{D})=\{2,3,4,5\}.$$

经计算可得 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$ 是覆盖相对协调集，也是唯一的覆盖相对约简。

定义6 设 $(U,\mathbf{A},\mathcal{D})$ 为覆盖决策系统，且对任意的 $D_i\neq D_j\in\mathcal{D}$ 有 $\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_i)\cap\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_j)=\emptyset$。对 $x,y\in U$，记

$$D(x,y)=\begin{cases}\{\mathcal{C}\in\mathbf{A}\mid y\notin(x)_{\mathcal{C}}\}, & \text{当 } (x)_{\mathbf{A}}\subseteq D_r\in\mathcal{D} \text{ 且 } y\notin D_r,\\ \emptyset, & \text{否则},\end{cases}$$

称 $D(x,y)$ 为 x 对 y 的覆盖辩识集，$D=(D(x,y)\mid x,y\in U)$ 为覆盖辩识矩阵。

在决策信息系统 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 中，$[x]_{\mathbf{A}}\subseteq D_r$ 且 $y\notin D_r\Rightarrow[x]_d\cap[y]_d=\emptyset$ 且 $x,\ y$ 中至少有一元属于 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)$。因此将决策信息系统 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 看为覆盖决策系统时，定义6中的辩识集是文 [4] 定义的辩识集

$$D_d(x,y)=\begin{cases}\{a_l\in\mathbf{A}\mid f_l(x)\neq f_l(y)\}, & d(x)\neq d(y) \text{ 且 } \min\{|d([x]_{\mathbf{A}})|,|d([y]_{\mathbf{A}})|\}=1,\\ \emptyset, & [x]_d\cap[y]_d\neq\emptyset,\end{cases}$$

的特殊情况。

定理3 设 $(U,\mathbf{A},\mathcal{D})$ 为覆盖决策系统，且对任意的 $D_i\neq D_j\in\mathcal{D}$ 有 $\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_i)\cap\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_j)=\emptyset$。$\mathbf{B}$ 是覆盖相对协调集的充要条件是，对于不空的 $D(x,y)$ 有 $\mathbf{B}\cap D(x,y)\neq\emptyset$。

证明 **必要性** 已知 $\mathbf{B}$ 是覆盖相对协调集。设 $D(x,y)\neq\emptyset$，则存在 $D_r\in\mathcal{D}$ 使 $(x)_{\mathbf{A}}\subseteq D_r$ 且 $y\notin D_r$，必有 $\mathbf{B}\cap D(x,y)\neq\emptyset$。否则，对任意的 $\mathcal{C}\in\mathbf{B}$ 有 $y\in(x)_{\mathcal{C}}$，那么 $y\in(x)_{\mathbf{B}}$。于是 $(x)_{\mathbf{B}}\not\subseteq D_r$，则 $x\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_r)$ 而 $x\notin\underline{C}_{\mathbf{B}}(D_r)$，可得 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)\neq\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)$，与 $\mathbf{B}$ 是覆盖相对协调集矛盾。

充分性 若 $(x)_{\mathbf{A}}\subseteq D_r$。设 $y\notin D_r$，则 $D(x,y)\neq\emptyset$，于是 $\mathbf{B}\cap D(x,y)\neq\emptyset$，那么存在 $\mathcal{C}\in\mathbf{B}\cap D(x,y)$，$y\notin(x)_{\mathcal{C}}$，则 $y\notin(x)_{\mathbf{B}}\subseteq(x)_{\mathcal{C}}$。于是 $(x)_{\mathbf{B}}\subseteq D_r$。那么对任意的 $D_r\in\mathcal{D}$，$\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_r)=\underline{C}_{\mathbf{B}}(D_r)$，则 $\mathrm{Pos}_{\mathbf{A}}(d)=\mathrm{Pos}_{\mathbf{B}}(d)$，$\mathbf{B}$ 是覆盖相对协调集。 **证毕**

推论1 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是决策信息系统，$\mathbf{B}$ 是 d 的 $\mathbf{A}$ 协调集当且仅当对于任意 $D_d(x,y)\neq\emptyset$ 有 $\mathbf{B}\cap D_d(x,y)\neq\emptyset$。

定理4 设 $(U,\mathbf{A},\mathcal{D})$ 为覆盖决策系统，且对任意的 $D_i\neq D_j\in\mathcal{D}$ 有 $\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_i)\cap\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_j)=\emptyset$。下述等价：

1) $\mathcal{C}$ 属于覆盖相对核心；

2) 存在 $x,y\in U$，$D(x,y)=\{\mathcal{C}\}$；

3) 存在 $x\in U$，$D_r\in\mathcal{D}$，$(x)_{\mathbf{A}}\subseteq D_r$ 但 $(x)_{\mathbf{A}-\{\mathcal{C}\}}\not\subseteq D_r$。

证明 1)⇒2)。若2)不成立，对于任意包含 $\mathcal{C}$ 的 $D(x,y)$ 有 $|D(x,y)|\geq 2$。记 $\mathbf{B}=\cup\{D(x,y)-\{\mathcal{C}\}\mid x,y\in U\}$，则 $\mathbf{B}$ 是覆盖相对协调集，于是 $\mathcal{C}$ 不属于某一覆盖相对约简集 $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{B}$，与 $\mathcal{C}$ 属于覆盖相对核心矛盾。

2)⇒3)。设 $D(x,y)=\{\mathcal{C}\}$，则存在 $D_r\in\mathcal{D}$ 使 $(x)_{\mathbf{A}}\subseteq D_r$ 且 $y\notin D_r$。则 $y\notin(x)_{\mathcal{C}}$，而对 $\mathcal{C}_l\in\mathbf{A}-\{\mathcal{C}\}$ 有 $y\in(x)_{\mathcal{C}_l}$，于是 $y\in(x)_{\mathbf{A}-\{\mathcal{C}\}}$，可见 $(x)_{\mathbf{A}-\{\mathcal{C}\}}\not\subseteq D_r$。

3)⇒1)。对于 $\mathbf{A}-\{\mathcal{C}\}$ 的任意子集 $\mathbf{B}$，$(x)_{\mathbf{B}}\not\subseteq D_r$。所以 $x\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_r)$ 且 $x\notin\underline{C}_{\mathbf{B}}(D_r)$，$\mathbf{B}$ 不是覆盖相对协调集，可见 $\mathbf{A}$ 的任意覆盖相对约简集包含 $\mathcal{C}$，故 $\mathcal{C}$ 属于覆盖相对核心。 **证毕**

推论 2[4] 设 $(U,\mathbf{A},F,d)$ 是决策信息系统，$R\in \mathrm{core}_{\mathbf{A}}(d)$ 当且仅当存在 $x,\ y\in U$ 使 $D_d(x,y) = \{R\}$。

例 2 续例 1 有辩识矩阵如下

x	1	2	3	4	5
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{\mathcal{C}_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
3	$\mathbf{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\mathbf{A}$
4	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$

从辩识矩阵，根据定理 3 和定理 4 可得覆盖相对核心是 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$，覆盖相对约简是 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$。

3.2 在 “存在 $D_i\neq D_j\in\mathcal{D}$ 使得 $\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_i)\cap\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_j)\neq\emptyset$” 下的约简

如果 $x\in U$ 属于 $\mathcal{D}$ 中多个元素的下近似，选定其中的一个，那么就有多种选法。对每种选法，采用 3.1 的约简理论求约简，然后综合所有选法得到个数最少的约简为覆盖相对约简。以下例详细说明。

例 3 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$\mathbf{A}=\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 U 上一族覆盖和一个覆盖，它们为

$$\mathcal{C}_1=\big\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5\}\big\},\quad \mathcal{C}_2=\big\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{5\}\big\},\quad \mathcal{C}_3=\big\{\{1,2\},\{3,4\},\{4,5\}\big\},$$

$$\mathcal{D}=\big\{D_1=\{1,2\},\,D_2=\{2\},\,D_3=\{3\},\,D_4=\{3,4\},\,D_5=\{5\}\big\},$$

有

$$\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)=\{1,2\},\quad \underline{C}_{\mathbf{A}}(D_2)=\{2\},\quad \underline{C}_{\mathbf{A}}(D_3)=\{3\},$$

$$\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)=\{3,4\},\quad \underline{C}_{\mathbf{A}}(D_5)=\{5\}.$$

这时 $2\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)\cap\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_2)$，$3\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_3)\cap\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$。可知总共有四种选法。

1) $1\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)$，$2\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)$，$3\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_3)$，$4\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$，$5\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_5)$。

根据定义 6，可得辩识矩阵

x	1	2	3	4	5
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
3	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\mathbf{A}$
4	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$
5	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\emptyset$

由辩识矩阵可得 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$ 和 $\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$ 是覆盖相对约简，$\{\mathcal{C}_2\}$ 是覆盖相对核心。

2) $1\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)$，$2\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_2)$，$3\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_3)$，$4\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$，$5\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_5)$。

由定义 6，可得辩识矩阵

x	1	2	3	4	5
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
2	$\{\mathcal{C}_1\}$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
3	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\mathbf{A}$
4	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$
5	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\emptyset$

由辩识矩阵可得 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$ 是覆盖相对约简，也是覆盖相对核心。

3) $1\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)$, $2\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)$, $3\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$, $4\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$, $5\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_5)$。

根据定义6，可得辩识矩阵

x	1	2	3	4	5
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
3	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$
4	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$
5	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\emptyset$

由辩识矩阵可得 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$ 和 $\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$ 是覆盖相对约简，$\{\mathcal{C}_2\}$ 是覆盖相对核心。

4) $1\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_1)$, $2\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_2)$, $3\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$, $4\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_4)$, $5\in\underline{C}_{\mathbf{A}}(D_5)$。

由定义6，可得辩识矩阵

x	1	2	3	4	5
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
2	$\{\mathcal{C}_1\}$	$\emptyset$	$\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
3	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$
4	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{A}$
5	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\{\mathcal{C}_2\}$	$\emptyset$

由辩识矩阵可得 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$ 是覆盖相对约简，也是覆盖相对核心。

综合以上四种情况可知 $\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\}$ 和 $\{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$ 是最小约简。

4 总结

本文将决策信息系统的属性诱导的划分放宽为覆盖的条件下，提出覆盖相对约简的概念，构造辩识矩阵来刻画覆盖相对约简，推广了 Chen 等[14] 的协调和不协调覆盖决策系统的约简理论，具有一定的意义。

参考文献：

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356
[2] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991
[3] Skowron A, Rauszer C. The discernibility matrices and functions in information systems[C]// R. Slowinski(ed.), Intelligent Decision Support-Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992: 331-362
[4] 叶东毅，陈昭炯. 一个新的差别矩阵及其求核方法[J]. 电子学报，2002, 30(7): 1086-1088
[5] 叶东毅. Jelonek属性约简算法的一个改进[J]. 电子学报，2002, 28(12): 81-82
[6] 高学东，丁军. 基于简化差别矩阵的属性约简算法[J]. 系统工程理论与实践，2006, 6: 101-107
[7] 刘洋，冯博琴，周江卫. 一种改进的基于差别矩阵的属性约简算法[J]. 微电子学与计算机，2007, 24(5): 133-137
[8] 杨明. 一种基于改进差别矩阵的属性约简增量式更新算法[J]. 计算机学报，2007, 30(5): 815-822
[9] 王国胤. 决策表属性计算方法[J]. 计算机学报，2003, 26(5): 611-615
[10] 王国胤，于洪，杨大春. 基于条件信息熵的决策表约简[J]. 计算机学报，2002, 25(7): 759-766
[11] 刘少辉，盛秋，史忠植. 一种新的快速计算正区域方法[J]. 计算机研究与发展，2003, 40(5): 637-642
[12] 管延勇，薛佩军. 不完备信息系统的可信决策规则提取与E-相对约简[J]. 系统工程理论与实践，2005, 12: 76-82
[13] 张腾飞，肖健梅，王锡淮. 粗糙集理论中属性相对约简算法[J]. 电子学报，2005, 33(11): 2080-2083
[14] Chen D G, Wang C Z, Hu H Q. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177: 3500-3518
[15] 张文修，仇国芳. 基于粗糙集的不确定性决策[M]. 北京：清华大学出版社，2005

On Relative Reduction of Knowledges in Covering Decision Systems

ZHANG Yan-lan, LI Jin-jin

(Department of Computer Sciences and Engineering, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000)

Abstract: The relative relation between one knowledge and another is important in application. This paper proposes the relative reduction of knowledges in coverings and defines covering relative reduction, which preserves the positive region of a covering. A discernibility matrix is also constructed to establish the judgement theorem for covering consistent set and covering core. Then, the theory of relative reduction in inconsistent covering decision systems is generalized.

Keywords: positive region; covering; relative reduction